KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów gimnazjów w roku szkolnym 2012/13

II etap zawodów (rejonowy)
10 listopada 2012 r.

Propozycja punktowania rozwiązań zadań

<u>Uwaga:</u> Za każde poprawne rozwiązanie inne niż przewidziane w propozycji punktowania rozwiązań zadań przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

<u>Zadanie 1.</u>

Wykaż, że kwadrat dowolnej liczby całkowitej dodatniej jest podzielny przez 9 albo przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

Uczeń:	
• zauważa, że dowolna liczba całkowita dodatnia przy dzieleniu przez 3 daje resztę zero, jeden lub dwa.	1 p
• uzasadnia, że kwadrat liczby całkowitej dodatniej podzielnej przez 3 jest podzielny przez 9.	1 p
• uzasadnia, że dla liczby całkowitej dodatniej, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, jej kwadrat również przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.	1 p
• uzasadnia, że dla liczby całkowitej dodatniej, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2 jej kwadrat przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.	1 p

1. Dowolną liczbę całkowitą dodatnią można zapisać w postaci: $3n$ albo $3n+1$ albo $3n+2$, gdzie n należy do zbioru liczb całkowitych dodatnich.

2. $(3n)^2 = 9n^2$ jest podzielna przez 9

3. $(3n + 1)^2 = 9n^2 + 6n + 1$

zatem $\frac{9n^2 + 6n + 1}{3} = \frac{3(3n^2 + 2)}{3} + \frac{1}{3}$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1

4. $(3n + 2)^2 = 9n^2 + 12n + 4$

zatem $\frac{9n^2 + 12n + 3 + 1}{3} = \frac{3(3n^2 + 4n + 1)}{3} + \frac{1}{3}$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1

Zadanie 2.

Średnia arytmetyczna dziewięciu uporządkowanych rosnąco liczb naturalnych jest równa 5, liczbą występującą najczęściej (taką liczbę nazywamy dominantą) jest liczba 8, a mediana (środkowa) tego uporządkowanego zbioru liczb wynosi 6. Jak zmieni się średnia arytmetyczna i dominanta, jeśli każdą z czterech pierwszych liczb zwiększymy o 6, a każdą z czterech ostatnich liczb zmniejszymy o 6? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: • uzależnia wielkość dominanty od mediany • ustala wielkość dominanty po zmianie • zapisuje warunki dla średniej arytmetycznej przed i po zmianie • ustala wielkość średniej arytmetycznej po zmianie	 1 p 1 p 1 p 1 p
Jeżeli uczeń prawidłowo uzasadnia (może być opis słowny, nie wymagamy uzasadnienia algebraicznego) zachowanie się dominanty i średniej arytmetycznej otrzymuje **4 punkty**.	

1. **Odp. I. dominanta – po zmianie będzie wynosić 2**

   Uzasadnienie: dominanta jest większa od mediany, czyli liczby 8, występujące najczęściej w tym zbiorze, znajdują się wśród czterech ostatnich liczb i każda z nich zostanie zmniejszona o 6 – teraz liczbą występującą najczęściej będzie liczba 2

2. średnia arytmetyczna:

było: $$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+6+a_6+a_7+a_8+a_9}{9}=5$$

czyli: $a_1+a_2+a_3+a_4+6+a_6+a_7+a_8+a_9=45$

jest:
$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+4\cdot 6+6+a_6+a_7+a_8+a_9-4\cdot 6}{9}=$$
$$=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+6+a_6+a_7+a_8+a_9}{9}=5$$

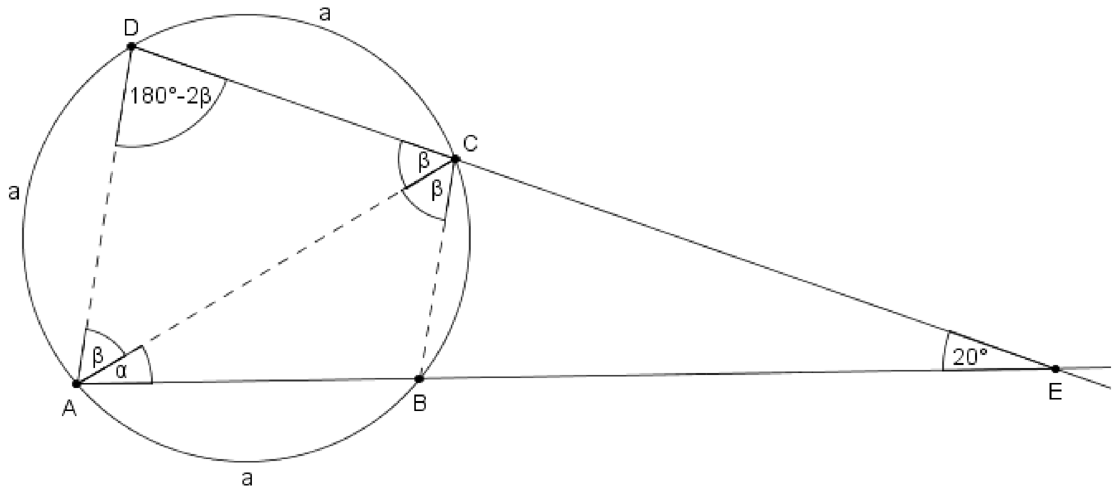
Odp. II. średnia arytmetyczna nie zmieni się

Zadanie 3.

Na okręgu obrano punkty *A*, *B*, *C* i *D* tak, że długości odcinków *AB*, *AD* i *DC* są równe. Proste *AB* i *DC* przecinają się na zewnątrz okręgu w punkcie *E* i $|\angle AED|=20°$ (patrz rysunek). Oblicz miarę kąta *CAB*.

Uczeń: • korzysta z równości kątów wpisanych opartych na łukach tej samej długości • korzysta z własności czworokąta wpisanego w okrąg lub z własności kątów środkowych i wpisanych opartych na tym samym łuku. • korzysta z sumy kątów trójkąta • przekształca zależności i oblicza miarę kąta CAB	 1 p 1 p 1 p 1 p

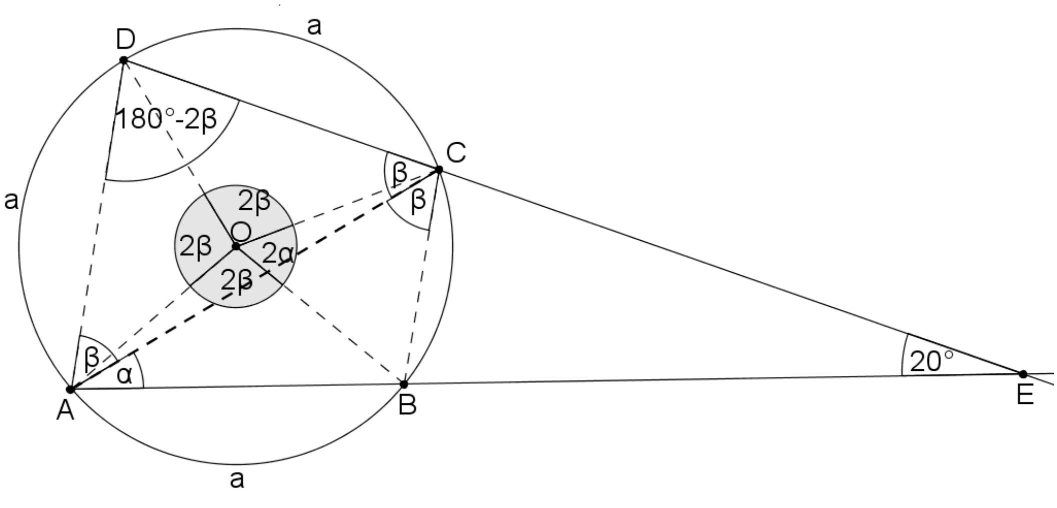
I sposób:



Oznaczmy: $|\angle CAB| = \alpha$

1. Kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości są równe:
   $|\angle ACB| = |\angle ACD| = |\angle CAD| = \beta$
2. z sumy kątów w trójkącie ACD: $|\angle ADC| = 180° - 2\beta$
3. czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg, więc $\alpha + 3\beta = 180°$
4. z sumy kątów w trójkącie AED:
   $(180° - 2\beta) + \alpha + \beta + 20° = 180°$
   $\alpha + 20° = \beta$
5. z punktu 3.:
   $\alpha + 3(\alpha + 20°) = 180°$
   $4\alpha = 120°$
   $\alpha = 30°$

II sposób:



Oznaczmy: $|\angle CAB| = \alpha$

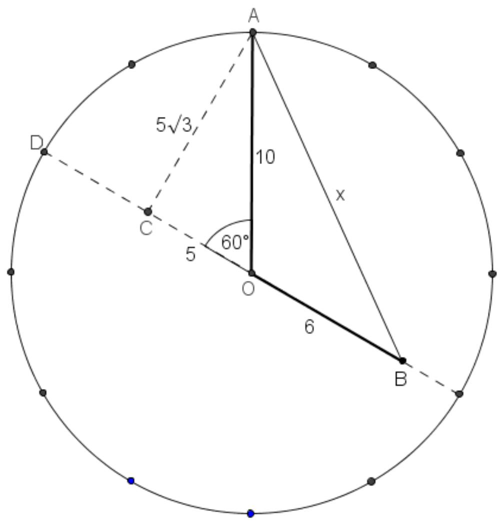
1. Kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości są równe:
   $|\angle ACB| = |\angle ACD| = |\angle CAD| = \beta$
2. z własności kątów wpisanych i środkowych opartych na tym samym łuku:
   $2\alpha + 6\beta = 360°$
   $a + 3\beta = 180°$
3. z sumy kątów w trójkącie AED:
   $180° = 180° - 2\beta + \alpha + \beta + 20°$
   $\beta = \alpha + 20°$
4. korzystając z punktu 1. i 2.
   $\alpha + 3\beta = 180° \qquad \beta = \alpha + 20°$
   $\alpha + 3(\alpha + 20°) = 180°$
   $4\alpha = 120°$
   $\alpha = 30°$

Zadanie 4.

Wskazówki zegara mają długości 10 cm i 6 cm. Oblicz odległość między końcami wskazówek o godzinie 16.00

Uczeń: • wykonuje rysunek, zaznacza szukany odcinek oraz trójkąty, które posłużą do obliczenia długości tego odcinka • wyznacza miarę kąta między wskazówkami zegara oraz miarę kąta przyległego $(\lvert\angle COA\rvert)$. • wyznacza długości boków trójkąta *AOC* (może je zapisać na rysunku) • korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *ABC* oblicza szukaną długość odcinka	1 p 1 p 1 p 1 p

1. rysunek:



2. zauważmy, że $|\angle COA| = 60°$

3. ΔAOD jest równoboczny o boku 10 cm i wysokości $|AC| = 5\sqrt{3}$ cm

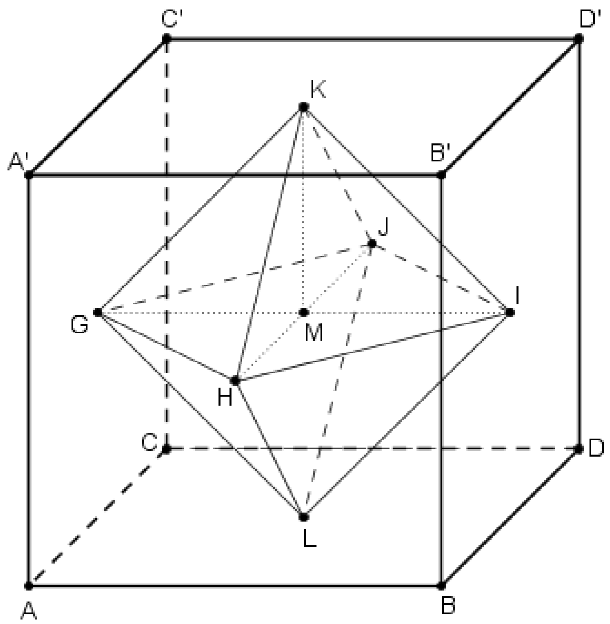
4. ΔACB jest prostokątny, korzystamy z tw. Pitagorasa:

$$11^2 + \left(5\sqrt{3}\right)^2 = x^2$$
$$x^2 = 196$$
$$x = \sqrt{4 \cdot 49}$$
$$x = 14$$

Zadanie 5.

Środki sąsiednich ścian sześcianu (punkty przecięcia się przekątnych ścian) połączono odcinkami w taki sposób, że powstał ośmiościan wpisany w sześcian. Oblicz objętość i sumę długości wszystkich krawędzi tego ośmiościanu, jeżeli długość krawędzi sześcianu wynosi *a*.

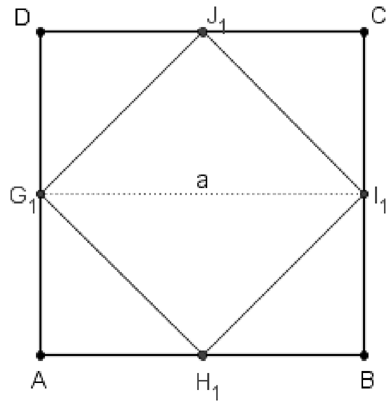
Uczeń: • wykonuje rysunek, który wykorzysta do rozwiązania zadania, • wyznacza wysokość jednego ostrosłupa, • oblicza objętość ośmiościanu, • oblicza długość jednej krawędzi ośmiościanu i sumę długości wszystkich krawędzi.	1 p 1 p 1 p 1 p



1. zauważmy, że otrzymaliśmy ośmiościan foremny, w którym *GHIJ* – kwadrat

$$P_{GHIJ} = \frac{a^2}{2}$$

2. $|MK| = \frac{a}{2}$



3. $V_{osm.} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6} [j^3]$

4. aby obliczyć sumę długości wszystkich krawędzi ośmiościanu korzystamy np. z trójkąta MIK

   (patrz rysunek obok):

   $L = 12 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = 6a\sqrt{2} [j]$