

KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów gimnazjów w roku szkolnym 2012/13

Propozycja punktowania rozwiązań zadań

Uwaga: Za każde poprawne rozwiązanie inne niż przewidziane w propozycji punktowania rozwiązań zadań przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1.

Rozwiąż równanie

$$\left[NWD\left(15^3, \left((2^5 - 3^3)^2\right)^2\right) \right]^3 + NWW\left(2^4 - 2^2, 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right) - 3x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$$

Uczeń:	
• oblicza potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim,	1 p
• oblicza potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym,	1 p
• znajduje NWD i NWW dwóch liczb,	1 p
• rozwiązuje równanie.	1 p
Za błąd rachunkowy, który nie ułatwia znacznie rozwiązania zadania, proponuję odjąć 1 p.	

$$\left[NWD\left(15^3, \left((2^5 - 3^3)^2\right)^2\right) \right]^3 = \left[NWD(15^3, 25^2) \right]^3 = 5^3 = 125$$

$$NWW\left(2^4 - 2^2, 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right) = NWW(12, 18) = 36$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 2^7 = 128$$

$$125 + 36 - 3x = 128$$

$$x = 11$$

Zadanie 2.

Autokarem jechała grupa osób, których średnia wieku była równa ich liczbie. Kiedy do autokaru wsiadł pasażer w wieku 49 lat okazało się, że średnia wieku jest nadal równa liczbie pasażerów. Oblicz, ile osób jechało w autokarze zanim wsiadł nowy pasażer.

Uczeń:	
• opisuje sytuację początkową korzystając z definicji średniej arytmetycznej,	1 p
• opisuje sytuację końcową korzystając z definicji średniej arytmetycznej,	1 p
• układa równanie prowadzące do obliczenia początkowej liczby pasażerów,	1 p
• rozwiązuje równanie.	1 p

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = n$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^2$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n + 49}{n + 1} = n + 1$$

$$n^2 + 49 = (n + 1)^2$$

$$49 = n^2 + 2n + 1 - n^2$$

$$48 = 2n$$

$$n = 24$$

Zadanie 3.

Liczba pracowników pewnej firmy zmniejszyła się w stosunku do ubiegłego roku o 10%. W ubiegłym roku kobiety stanowiły 50% wszystkich pracowników firmy, a w tym roku 55% wszystkich pracowników. Oblicz o ile procent, w porównaniu z rokiem ubiegłym, liczba kobiet pracujących w firmie zmniejszyła się lub zwiększyła.

Uczeń:	
• zapisuje liczbę pracowników firmy w I i II roku,	1 p
• zapisuje liczbę kobiet w I i II roku,	1 p
• oblicza o ile zmniejszyła się liczba kobiet,	1 p
• oblicza o ile procent zmniejszyła się liczba kobiet.	1 p

Liczba. pracowników firmy w I roku – x

Liczba. pracowników firmy w II roku – 0,9x

Liczba kobiet w I roku – 0,5x

Liczba kobiet w II roku – 0,55 · 0,9x = 0,495x

0,5x – 0,495x = 0,005x

Liczba kobiet zmniejszyła się o 0,005x

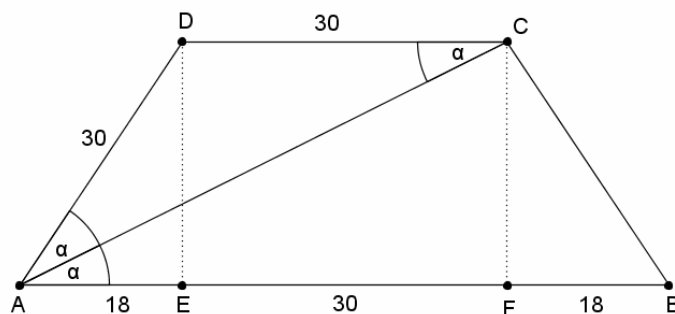
co stanowi:

$$\frac{0,005}{0,5} \cdot 100\% = \frac{5}{500} \cdot 100\% = 1\%$$

Zadanie 4.

Przekątna trapezu równoramiennego, którego podstawy mają długość 30 cm i 66 cm, jest dwusieczną kąta przy jego dłuższej podstawie. Oblicz pole tego trapezu.

Uczeń:	
• uzasadnia, że $ \angle ACD = \angle BAC $,	1 p
• uzasadnia, że trójkąt ACD jest równoramienny, a zatem $ AD = 30$ cm,	1 p
• oblicza długość wysokości trapezu,	1 p
• oblicza pole trapezu.	1 p



Uzasadnia, że $|\angle ACD| = |\angle BAC|$

Uzasadnia, że trójkąt ACD jest równoramienny, a zatem $|AD| = 30$ cm,

$$h = 24 \text{ cm}$$

$$P = \frac{30 + 66}{2} \cdot 24 = 96 \cdot 12 = 1152 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Zadanie 5.

Ruchomy chodnik o długości 150 metrów przesuwa się z prędkością 2 metry na sekundę. Dwaj chłopcy ruszają jednocześnie z obu końców chodnika, jeden z nich biegnie z prędkością 150 metrów na minutę. Oblicz prędkość z jaką powinien biec drugi chłopiec, aby chłopcy spotkali się w połowie długości chodnika.

Uczeń:	
• zamienia jednostki,	1 p
• zapisuje drogi pokonane przez chłopców w pierwszym przypadku,	1 p
• zapisuje drogi pokonane przez chłopców w drugim przypadku,	1 p
• oblicza prędkość II chłopca.	1 p

$$v_{chl.} = \frac{150 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s_1 = (2,5 + 2) \cdot t_1$$

$$s_1 = (y + 2) \cdot t$$

$$s_2 = (x - 2) \cdot t_1$$

$$s_2 = (2,5 - 2) \cdot t$$

$$(2,5 + 2) \cdot t_1 = (x - 2) \cdot t_1$$

lub

$$(y + 2) \cdot t_2 = (2,5 - 2) \cdot t_2$$

$$x = 6,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y = -1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

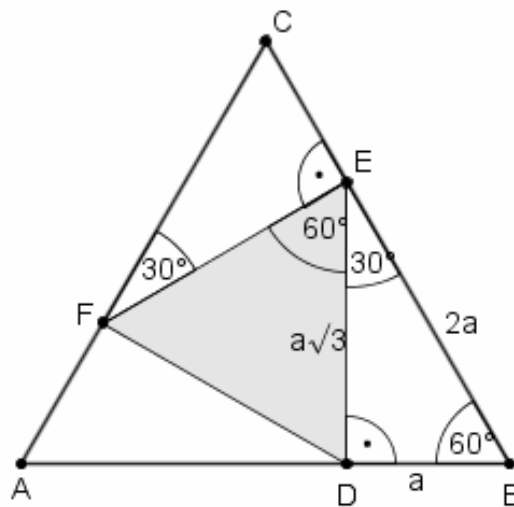
niemożliwe

II chłopiec powinien biec „pod prąd” z prędkością $6,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Zadanie 6.

W trójkąt równoboczny ABC wpisano trójkąt równoboczny DEF w taki sposób, że boki AB i DE są prostopadłe, a wierzchołek F należy do boku AC . Oblicz, ile razy pole trójkąta DEF jest mniejsze od pola trójkąta ABC .

Uczeń:	
• uzasadnia, że trójkąt DBE jest połową trójkąta równobocznego i opisuje długości jego boków,	1 p
• oblicza pole trójkąta DEF ,	1 p
• uzasadnia przystawanie dwóch z trzech trójkątów BDE , CEF , AFD i oblicza pole trójkąta ABC ,	1 p
• oblicza ile razy pole trójkąta DEF jest mniejsze od pola trójkąta ABC .	1 p



1. uzasadnia długości boków trójkąta DBE

2. oblicza pole trójkąta DEF : $P_{\triangle DEF} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4} =$

3. $\triangle DBE \equiv \triangle CEF \equiv \triangle AFD$ (kbk)
 $\Downarrow$

$$|CE| = |DB| = a$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{9a^2 \sqrt{3}}{4}$$

4. $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DEF}} = \frac{\frac{9a^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}} = 3$

$$P_{\triangle ABC} = 3 \cdot P_{\triangle DEF}$$