WOJEWÓDZKI KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów szkół podstawowych w roku szkolnym 2012/13
II stopień zawodów (rejonowy)
1 grudnia 2012 r.

Propozycja punktowania rozwiązań zadań

Uwaga
Za każde poprawne rozwiązanie inne niż przewidziane w propozycji punktowania rozwiązań zadań przyznajemy maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 1.

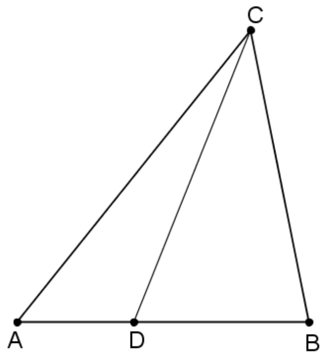
Krzyś ma przyjechać pociągiem do swojego kolegi Jacka o godzinie 9:30. Jacek obliczył, że jadąc rowerem z prędkością 150 metrów na minutę dojedzie na stację w ciągu 30 minut, wyruszył więc na spotkanie z Krzysiem o godzinie 9:00. Po przejechaniu $\frac{2}{3}$ drogi zatrzymał się na 5 minut. Oblicz, z jaką prędkością musi jechać dalej, aby zdążyć na 9:30 na stację.

Uczeń: • obliczy odległość z domu Jacka do stacji, • obliczy 1/3 i 2/3 odległości od stacji, • obliczy, w jakim czasie Jacek pokona 2/3 drogi, • obliczy prędkość Jacka na ostatnim odcinku drogi.	 1 pkt 1 pkt 1 pkt 1 pkt
UWAGA: *1. W obliczeniach uczeń nie musi zapisywać jednostek, ale odpowiedź musi podać z jednostką.*	

1. $s = 150 \cdot 30 = 4500[m]$ - odległość od stacji
2. $\frac{2}{3} \cdot 4500 = 3000[m]$
   $\frac{1}{3} \cdot 4500 = 1500[m]$
3. $t = \frac{3000}{150} = 20[\text{min}]$ - w takim czasie Jacek pokonał pierwszy odcinek drogi
4. 30 – 20 – 5 = 5 [min] – tyle czasu zostało do przyjazdu pociągu Krzysia
   $v = \frac{1500}{5} = 300\left[\frac{m}{\text{min}}\right]$

Zadanie 2.

Pole trójkąta ABC jest równe $12{,}5\,cm^2$. Na boku AB tego trójkąta obrano punkt D tak, że pole trójkąta ADC jest równe $5\,cm^2$. Wiedząc, że długość $|AD| = 2\,cm$, oblicz długość odcinka DB.



Uczeń:	
• zauważy, że trójkąty ADC, DBC oraz ABC mają wspólną wysokość,	1 pkt
• obliczy wysokość trójkąta ADC,	1 pkt
• obliczy pole trójkąta DBC,	1 pkt
• obliczy długość odcinka DB.	1 pkt

1. odcinek *CE* jest wysokością trójkątów *ADC*, *DBC* oraz *ABC*, $|CE| = h$,

2. $P_{\Delta ADC} = 5 = \frac{2 \cdot h}{2}$

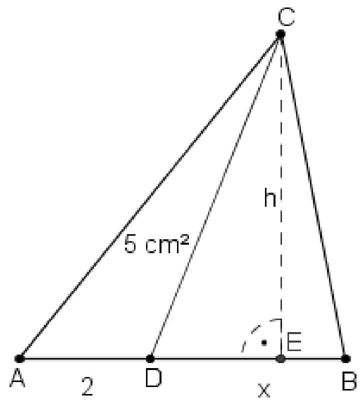
   $h = 5$

3. $P_{\Delta DBC} = 12,5 - 5 = 7,5$

   $P_{\Delta DBC} = 7,5 = \frac{x \cdot 5}{2}$

4. $15 = x \cdot 5$

   $x = 3$



lub

$$P_{\Delta ABC} = 12,5 = \frac{(2 + x) \cdot 5}{2}$$

(1. – 4.) $(2 + x) \cdot 5 = 25$

$2 + x = 5$

$x = 3$

Zadanie 3.

Wśród liczb postaci $3^n + 1$ znajdź wszystkie liczby podzielne przez 5, jeśli *n* jest liczbą naturalną większą od zera i mniejszą od 20. Opisz sposób rozumowania.

Uczeń:	
• poda cechę podzielności liczb przez 5,	1 pkt
• zauważy cykliczne powtarzanie się ostatnich cyfr w kolejnych potęgach liczby 3,	1 pkt
• ustali, które potęgi liczby 3 spełniają warunki zadania,	1 pkt
• poda wszystkie liczby postaci $3^n + 1$ podzielne przez 5.	1 pkt

1. przez 5 dzielą się liczby, które w rzędzie jedności mają cyfrę 0 lub 5 (których ostatnią cyfrą jest 0 lub 5),
2. kolejne potęgi liczby 3 to:
$$3^1 = 3$$
$$3^2 = 9$$
$$3^3 = 27$$
$$3^4 = 81$$
$$\ldots$$
3. tylko potęgi 3^2, 3^6, 3^{10}, 3^{14}, 3^{18} kończą się cyfrą 9 i po dodaniu do tych potęg liczby 1 otrzymamy ostatnią cyfrę 0,
4. liczby podzielne przez 5, to: 3^2+1, 3^6+1, $3^{10}+1$, $3^{14}+1$, $3^{18}+1$

Zadanie 4.

Jacek i Agatka hodują żółwie w akwariach w kształcie prostopadłościanu. Jacek ma akwarium o wymiarach podstawy 42 cm na 55 cm i wysokości 25 cm. Akwarium Agatki ma wymiary podstawy 55 cm na 63 cm i wysokość 30 cm. Jacek podarował Agatce żółwia ze swojego akwarium i wówczas poziom wody w jego akwarium obniżył się o 3 mm. Oblicz, o ile podniesie się poziom wody w akwarium Agatki po włożeniu do niego żółwia otrzymanego od Jacka.

Uczeń: • obliczy objętość żółwia jako objętość słupa wody wypartego w akwarium Jacka (zwracając uwagę na poprawne jednostki), • zapisze wzór do obliczenia objętości żółwia w akwarium Agatki, • ułoży równanie, za pomocą którego obliczy wysokość słupa wody wypartego przez żółwia w akwarium Agatki, • obliczy, o ile podniesie się poziom wody w akwarium Agatki po włożeniu do niego żółwia otrzymanego od Jacka.	1 pkt 1 pkt 1 pkt 1 pkt
UWAGA: *1. W obliczeniach uczeń nie musi zapisywać jednostek, ale odpowiedź musi podać z jednostką.*	

1. $V_{żJ} = 42 \cdot 55 \cdot 0{,}3 = 693$
2. x – wysokość słupa wody wypartego przez żółwia w akwarium Agatki
   $V_{żA} = 55 \cdot 63 \cdot x$
3. $55 \cdot 63 \cdot x = 693$
4. $x = \frac{693}{3465} = 0{,}2\,[\text{cm}]$

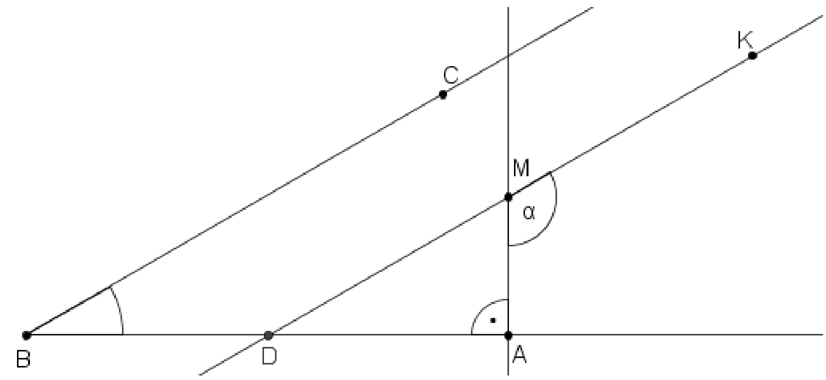
lub

(1. – 4.) $x = \frac{42 \cdot 55 \cdot 0{,}3}{55 \cdot 63} = \frac{42 \cdot 3}{630} = \frac{42}{210} = \frac{2}{10}\,[\text{cm}]$

Zadanie 5.

Dany jest kąt *ABC* o mierze 35° i kąt rozwarty *AMK*, którego ramię AM jest prostopadłe do ramienia *AB*, a ramię MK jest równoległe do ramienia *BC*. Przedłużenie ramienia MK przecina odcinek BA w punkcie D. Oblicz miarę kąta AMK. Wykonaj rysunek. Uzasadnij rozwiązanie, podając własności kątów, z których korzystasz.

Uczeń: • wykona rysunek i zaznaczy kąty, o których mowa w zadaniu, • zauważy kąty odpowiadające - $\left\|\angle \boldsymbol{ABC}\right\| = \mathbf{35^\circ} = \left\|\angle \boldsymbol{ADM}\right\|$, • z sumy kątów w trójkącie ADM obliczy miarę kąta AMD, • zauważy kąty przyległe i obliczy miarę kąta AMK.	1 pkt 1 pkt 1 pkt 1 pkt



1. rysunek

2. $\left|\angle ADM\right| = 35^\circ$ (kąty odpowiadające)

3. z sumy kątów w trójkącie AMD - $\left|\angle AMD\right| = 55^\circ$

4. z własności kątów przyległych - $\left|\angle AMK\right| = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$